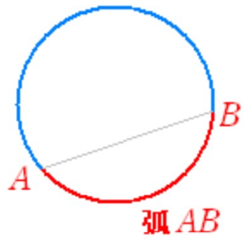
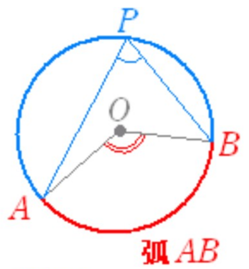
== 円周角の定理 ==

【弧(こ)・弦(げん)とは】
円周の一部を「弧」という.
例　右図の赤で示した部分を弧 AB などという.(これに対して灰色で示した線分は弦 AB という.)

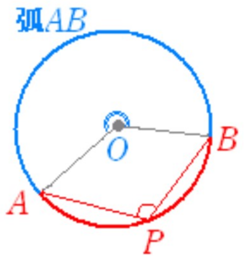


※　1つの弦により円周全体は2つの弧に分けられる. 右図において青で示した部分も弧になるが, 弧 AB といういうとき, 大きい方(青の方)か小さい方(赤の方)かが分かるようにしなければならない. [大きい方を「優弧」, 小さい方を「劣弧」と呼んで区別することもある.]

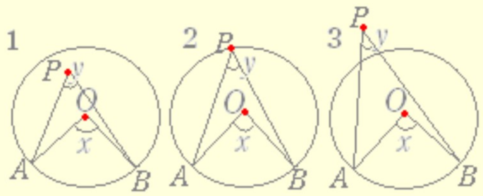
【中心角と円周角】
右図のように弧 AB があるときに, 弧 AB を除いた円周にある点を P とするとき, $\angle APB$ を弧 AB に対する円周角という.
弧 AB として, 右図赤で示した部分を考えるとき, 中心角 $\angle AOB$ と円周角 $\angle APB$ は右図のように対応する.



弧 AB として, 右図青で示した部分を考えるときは, 中心角 $\angle AOB$ と円周角 $\angle APB$ は右図のように対応する.



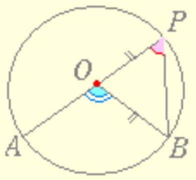
[例題1]
右図において中心角 x と円周角 y とが正しく対応しているものはどれか.



(答案)
2 …(答)
(1と3は点 P が円周上にないから $\angle APB$ が円周角になっていない.

【中心角と円周角の関係】
1つの弧に対する円周角は, その弧に対する中心角の半分に等しい.

(解説)
(ア)右図のように AOP が直線になるとき,

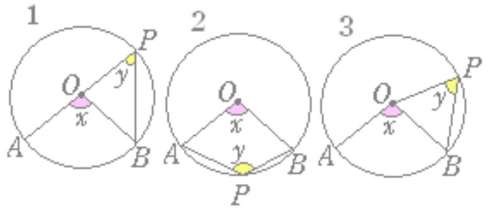


$OP=OB=$ (半径)だから
$\triangle OPB$ は二等辺三角形で
$\angle OPB=\angle OBP$ …(1)
三角形の外角の性質から
$\angle AOB=\angle OPB+\angle OBP$ …(2)
(1)(2)より $\angle AOB=2\angle OPB$
ゆえに, $\angle APB=\angle OPB=\frac{1}{2}\angle AOB$
となるから, 円周角は中心角の半分に等しい.

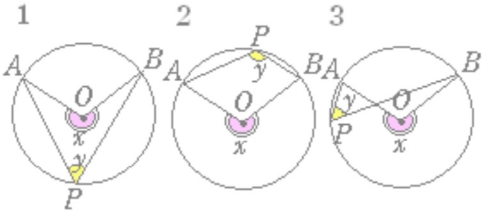
(イ)右のような図になるとき,

$\triangle AOP$ について
$OA=OP=$ (半径)だから

[問題1]
(1)　右図において中心角 x と円周角 y とが正しく対応しているものはどれか. 番号で答えなさい.

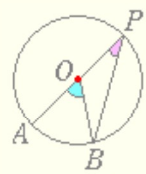


(2)　右図において中心角 x と円周角 y とが正しく対応しているものはどれか. 番号で答えなさい.



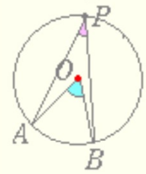
採点する　やり直す

[例題2]
(1) 右図において $\angle AOB=52°$ のとき, $\angle APB$ を求めなさい.



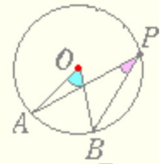
(答案)
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=26°$ …(答)

(2) 右図において $\angle AOB=48°$ のとき, $\angle APB$ を求めなさい.



(答案)
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=24°$ …(答)

(3) 右図において $\angle AOB=58°$ のとき, $\angle APB$ を求めなさい.

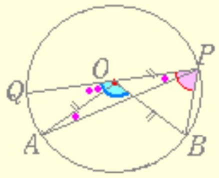


(答案)
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=29°$ …(答)

(4) 右図において $\angle AOB=240°$ のと

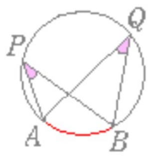
$\triangle AOP$ は二等辺三角形で
$\angle APO=\angle PAO$ …(1)
三角形の外角の性質から
$\angle AOQ=\angle APO+\angle OAP$ …(2)
(1)(2)より，$\angle AOQ=2\angle APQ$
ゆえに，$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ$ …(3)
同様にして，$\triangle BOP$ について
$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$ …(4)
(3)(4)より，$\angle APB=\angle APQ+\angle BPQ$
$=\frac{1}{2}\angle AOQ+\frac{1}{2}\angle BOQ=\frac{1}{2}\angle AOB$
となるから，円周角は中心角の半分に等しい．

(ウ)右のような図になるとき，
$\angle APB$
$=\angle QPB-\angle QPA$
$=\frac{1}{2}\angle QOB-\frac{1}{2}\angle QOA$
$=\frac{1}{2}(\angle QOB-\angle QOA)$
$=\frac{1}{2}\angle AOB$
となるから，円周角は中心角の半分に等しい．

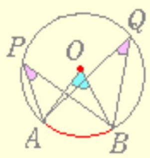


※ 円周角が $180°$ 以上となる場合も，円周角は中心角の半分になる．

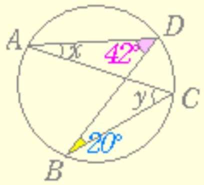
【円周角の定理】
同じ弧に対する円周角は等しい．
右図において
$\angle APB=\angle AQB$
が成り立つ．



(解説)
円周角は中心角の半分に等しいから，
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$
$\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AOB$
ゆえに，$\angle APB=\angle AQB$

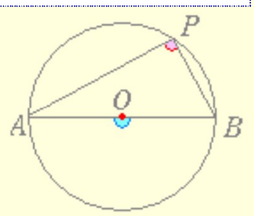


[例題3]
右図において $\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい．
(答案)
$\angle DAC$，$\angle DBC$ はいずれも弧 DC の円周角だから等しい． $\angle x=20°$ …(答)
$\angle ADB$，$\angle ACB$ はいずれも弧 AB の円周角だから等しい． $\angle y=42°$ …(答)



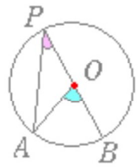
【直径の円周角】
直径の上に立つ円周角は $90°$ に等しい．
円周角が $90°$ のとき，弦は直径になる．

(解説)
円周角は中心角の半分に等しいので，中心角が $180°$ のとき，円周角は $90°$ になる．
逆に，円周角が $90°$ ならば中心角が $180°$，すなわち弦が直径になるということも言える．

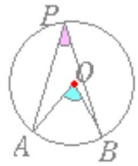


き，$\angle APB$ を求めなさい．
(答案)
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=120°$ …(答)

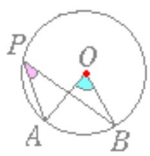
[問題2]
(1) 右図において $\angle AOB=50°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ °



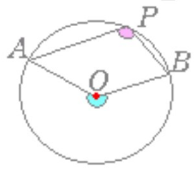
(2) 右図において $\angle AOB=54°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ °



(3) 右図において $\angle AOB=62°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ °

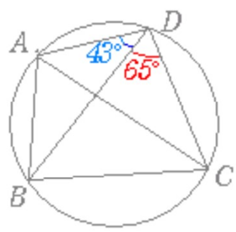


(4) 右図において $\angle AOB=210°$ (水色の部分)のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ °



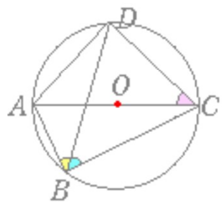
採点する　やり直す

[問題3]
右図において $\angle BAC$，$\angle BCA$ の大きさを求めなさい．
$\angle BAC=$ °
$\angle BCA=$ °



採点する　やり直す

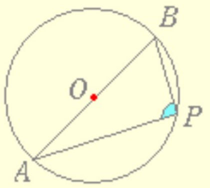
[問題4]
右図において O は円の中心とする．
$\angle DBC=55°$ のとき，
$\angle ABD=$ °
$\angle ACD=$ °



採点する　やり直す

［例題4］

右図において O が円の中心であるとき，$\angle APB$ の大きさを求めなさい．



（答案）

$\angle APB=90°$ …（答）

【円に内接する四角形】

円に内接する四角形の向かい合う1組の角の和は $180°$ に等しい．

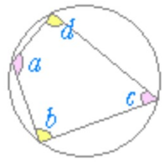
※ 右図のように向かい合う角 $\angle a$ と $\angle c$，$\angle b$ と$\angle d$ を各々向かい合う1組の角という．

この定理は右図において

$\angle a+\angle c=180°$

$\angle b+\angle d=180°$

となることを示している．



（解説）

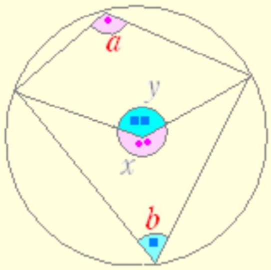
円周角は中心角の半分に等しいから

$a=\frac{x}{2}$, $b=\frac{y}{2}$ …(1)

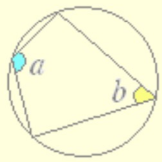
$x+y$ は円を一周するから

$x+y=360°$ …(2)

(1)(2)より $a+b=\frac{x+y}{2}=180°$



［例題5］



左図において

$\angle a=102°$ のとき $\angle b$ の大きさを求めなさい．

（答案）

$\angle a+\angle b=180°$ だから

$\angle b=78°$ ...（答）

【円周角のいろいろな問題1】

［例題6］

右図において O は円の中心で $\angle x=150°$ のとき $\angle y$ を求めなさい．

（答案）

右図のように $\angle z$ を考えると

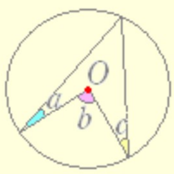
$\angle z=360°-150°=210°$

$\angle y=\frac{z}{2}=105°$ …（答）

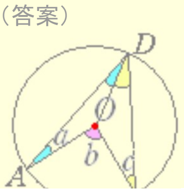
【円周角のいろいろな問題2】

［例題7］

右図において O は円の中心で $\angle a=15°$, $\angle c=20°$ のとき $\angle b$ を求めなさい．



（答案）

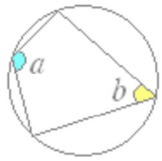


左図において $\triangle AOD$ は二等辺三角形だから，$\angle ADO=15°$

$\triangle COD$ は二等辺三角形だから，$\angle CDO=20°$

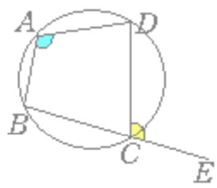
［問題5］

右図において $\angle b=63°$ のとき $\angle a$ の大きさを求めなさい．



$\angle a=$ ___ °

(2) 右図において $\angle BAD=110°$ のとき，$\angle DCE$ の大きさを求めなさい．



$\angle DCE=$ ___ °

採点する　やり直す

［問題6］

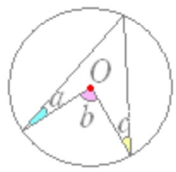
右図において $\angle y=100°$ のとき，$\angle x$ を求めなさい．

$\angle x=$ ___ °

採点する　やり直す

［問題7］

右図において $\angle a=10°$, $\angle b=80°$ のとき $\angle c$ を求めなさい．



$\angle c=$ ___ °

採点する　やり直す

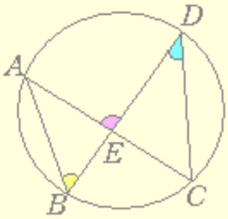
これらの和を求めると $\angle ADC=35°$

$\angle b=2\times\angle ADC=70°$　…(答)

【円周角のいろいろな問題3】

[例題8]

右図において $\angle ABD=51°$ ，$\angle BDC=42°$ のとき $\angle AED$ を求めなさい．



（答案）

$\triangle CDE$ において

$\angle ACD=\angle ABD=51°$

$\angle CDE=42°$

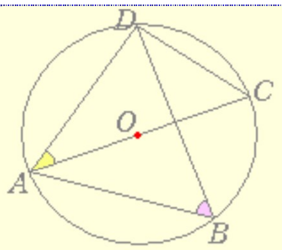
三角形の外角の性質から，

$\angle AED=\angle ECD+\angle CDE=93°$　…(答)

【円周角のいろいろな問題4】

[例題9]

右図において O は円の中心で $\angle DAC=37°$ のとき $\angle ABD$ を求めなさい．



（答案）

AC は直径だから

$\angle ADC=90°$

$\angle ACD=90°-37°=53°$

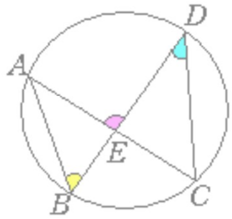
弦 AD に対する円周角は等しいから

$\angle ABD=\angle ACD=53°$　…(答)

[問題8]

右図において $\angle AED=100°$ ，$\angle ABE=60°$ のとき $\angle EDC$ を求めなさい．

$\angle EDC=$　　°

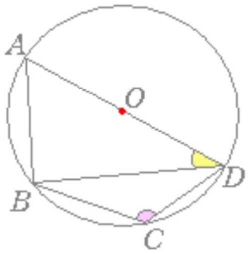


採点する　やり直す

[問題9]

右図において O は円の中心で $\angle BDA=25°$ のとき $\angle BCD$ を求めなさい．

$\angle BCD=$　　°



採点する　やり直す