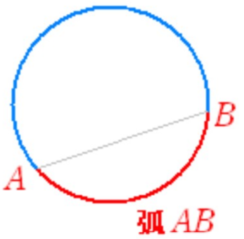
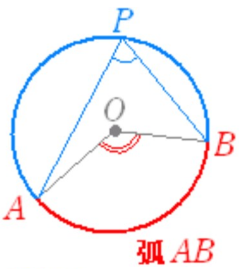
== 円周角の定理 =

【弧(こ)・弦(げん)とは】
　円周の一部を「弧」という．
例　右図の赤で示した部分を弧 AB などという．(これに対して灰色で示した線分は弦 AB という．)

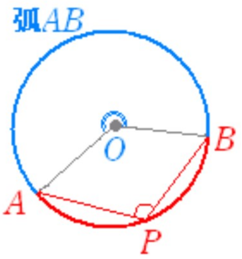


※　1つの弦により円周全体は2つの弧に分けられる．右図において青で示した部分も弧になるが，弧 AB といういうとき，大きい方(青の方)か小さい方(赤の方)かが分かるようにしなければならない．[大きい方を「優弧」，小さい方を「劣弧」と呼んで区別することもある．]

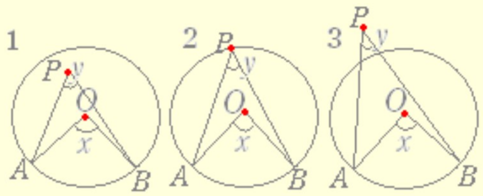
【中心角と円周角】
　右図のように弧 AB があるときに，弧 AB を除いた円周にある点を P とするとき，$\angle APB$ を弧 AB に対する円周角という．
　弧 AB として，右図赤で示した部分を考えるとき，中心角 $\angle AOB$ と円周角 $\angle APB$ は右図のように対応する．



　弧 AB として，右図青で示した部分を考えるときは，中心角 $\angle AOB$ と円周角 $\angle APB$ は右図のように対応する．



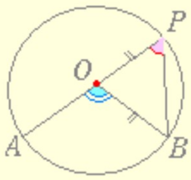
[例題1]
　右図において中心角 x と円周角 y とが正しく対応しているものはどれか．



(答案)
　2 …(答)
　(1と3は点 P が円周上にないから $\angle APB$ が円周角になっていない．

【中心角と円周角の関係】
　1つの弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の半分に等しい．

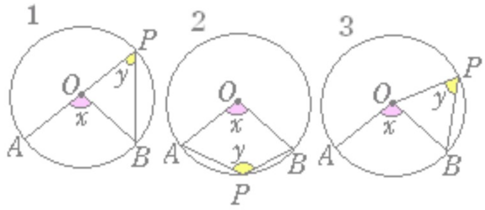
(解説)
(ア)右図のように AOP が直線になるとき，



　$OP=OB=$ (半径)だから
　$\triangle OPB$ は二等辺三角形で
$\angle OPB=\angle OBP$ …(1)
　三角形の外角の性質から
$\angle AOB=\angle OPB+\angle OBP$ …(2)
　(1)(2)より $\angle AOB=2\angle OPB$
ゆえに，$\angle APB=\angle OPB=\frac{1}{2}\angle AOB$
となるから，円周角は中心角の半分に等しい．

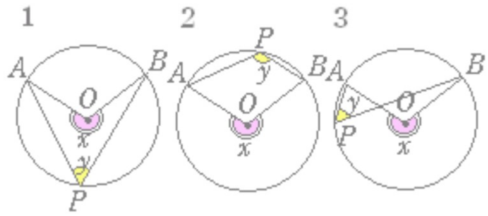
(イ)右のような図になるとき，
　$\triangle AOP$ について
　$OA=OP=$ (半径)だから

[問題1]
(1)　右図において中心角 x と円周角 y とが正しく対応しているものはどれか．番号で答えなさい．



1 ○

(2)　右図において中心角 x と円周角 y とが正しく対応しているものはどれか．番号で答えなさい．



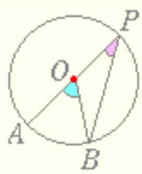
2 ○

採点する　やり直す　解説

(1)は1 , (2)は2

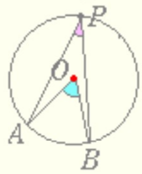
閉じる

[例題2]
(1)　右図において $\angle AOB=52°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．



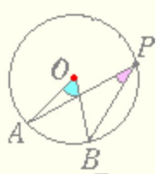
(答案)
　$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=26°$ …(答)

(2)　右図において $\angle AOB=48°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．



(答案)
　$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=24°$ …(答)

(3)　右図において $\angle AOB=58°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．

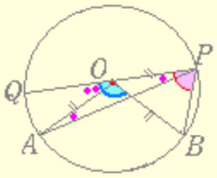


(答案)
　$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=29°$ …(答)

(4)　右図において $\angle AOB=240°$ のと

$\triangle AOP$ は二等辺三角形で
$\angle APO=\angle PAO$ …(1)
三角形の外角の性質から
$\angle AOQ=\angle APO+\angle OAP$ …(2)
(1)(2)より，$\angle AOQ=2\angle APQ$
ゆえに，$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ$ …(3)
同様にして，$\triangle BOP$ について
$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$ …(4)
(3)(4)より，$\angle APB=\angle APQ+\angle BPQ$
$=\frac{1}{2}\angle AOQ+\frac{1}{2}\angle BOQ=\frac{1}{2}\angle AOB$
となるから，円周角は中心角の半分に等しい．

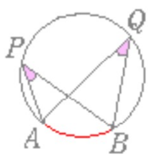
(ウ)右のような図になるとき，



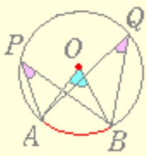
$\angle APB$
$=\angle QPB-\angle QPA$
$=\frac{1}{2}\angle QOB-\frac{1}{2}\angle QOA$
$=\frac{1}{2}(\angle QOB-\angle QOA)$
$=\frac{1}{2}\angle AOB$
となるから，円周角は中心角の半分に等しい．

※ 円周角が $180°$ 以上となる場合も，円周角は中心角の半分になる．

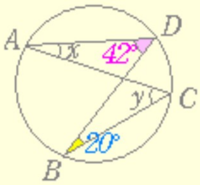
【円周角の定理】
同じ弧に対する円周角は等しい．
右図において
$\angle APB=\angle AQB$
が成り立つ．



(解説)
円周角は中心角の半分に等しいから，
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$
$\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AOB$
ゆえに，$\angle APB=\angle AQB$



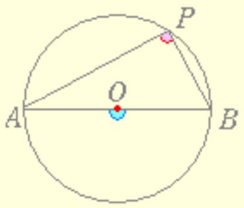
[例題3]
右図において $\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい．



(答案)
$\angle DAC$，$\angle DBC$ はいずれも弧 DC の円周角だから等しい． $\angle x=20°$ …(答)
$\angle ADB$，$\angle ACB$ はいずれも弧 AB の円周角だから等しい． $\angle y=42°$ …(答)

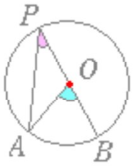
【直径の円周角】
直径の上に立つ円周角は $90°$ に等しい．
円周角が $90°$ のとき，弦は直径になる．

(解説)
円周角は中心角の半分に等しいので，中心角が $180°$ のとき，円周角は $90°$ になる．
逆に，円周角が $90°$ ならば中心角が $180°$，すなわち弦が直径になるということも言える．

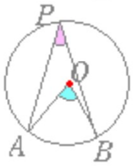


き，$\angle APB$ を求めなさい．
(答案)
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=120°$ …(答)

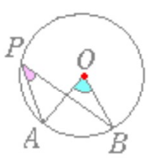
[問題2]
(1) 右図において $\angle AOB=50°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ 25 ° ○



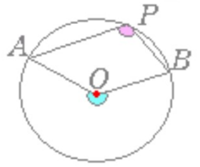
(2) 右図において $\angle AOB=54°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ 27 ° ○



(3) 右図において $\angle AOB=62°$ のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ 31 ° ○



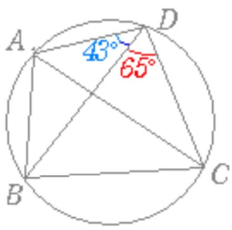
(4) 右図において $\angle AOB=210°$ (水色の部分)のとき，$\angle APB$ を求めなさい．
$\angle APB=$ 105 ° ○



採点する　やり直す　解説

(1) 25 (2) 27 (3) 31 (4) 105
閉じる

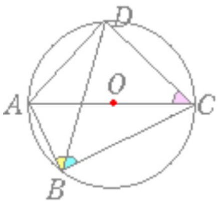
[問題3]
右図において $\angle BAC$，$\angle BCA$ の大きさを求めなさい．
$\angle BAC=$ 65 ° ○
$\angle BCA=$ 43 ° ○



採点する　やり直す　解説

同一の弦 BC に対する円周角は等しいから，
$\angle BAC=\angle BDC=65°$
同一の弦 AB に対する円周角は等しいから，
$\angle BCA=\angle BDA=43°$
閉じる

[問題4]
右図において O は円の中心とする．
$\angle DBC=55°$ のとき，
$\angle ABD=$ 35 ° ○
$\angle ACD=$ 35 ° ○

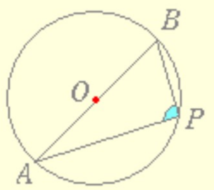


採点する　やり直す　解説

$\angle ABC$ は直径の上に立つ円周角だから $90°$

[例題4]

右図において O が円の中心であるとき，$\angle APB$ の大きさを求めなさい．

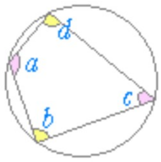


（答案）

$\angle APB=90°$ …（答）

【円に内接する四角形】

円に内接する四角形の向かい合う1組の角の和は $180°$ に等しい．



※ 右図のように向かい合う角 $\angle a$ と $\angle c$，$\angle b$ と$\angle d$ を各々向かい合う1組の角という．

この定理は右図において

$\angle a+\angle c=180°$

$\angle b+\angle d=180°$

となることを示している．

（解説）

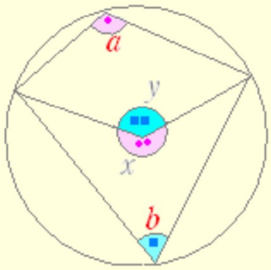
円周角は中心角の半分に等しいから

$a=\dfrac{x}{2}$ ，$b=\dfrac{y}{2}$ …(1)

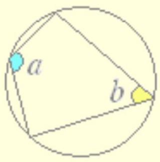
$x+y$ は円を一周するから

$x+y=360°$ …(2)

(1)(2)より $a+b=\dfrac{x+y}{2}=180°$



[例題5]



左図において

$\angle a=102°$ のとき $\angle b$ の大きさを求めなさい．

（答案）

$\angle a+\angle b=180°$ だから

$\angle b=78°$ …（答）

【円周角のいろいろな問題1】

[例題6]

右図において O は円の中心で $\angle x=150°$ のとき $\angle y$ を求めなさい．

（答案）

右図のように $\angle z$ を考えると

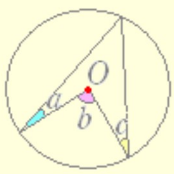
$\angle z=360°-150°=210°$

$\angle y=\dfrac{z}{2}=105°$ …（答）

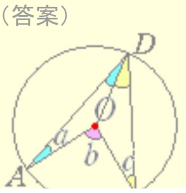
【円周角のいろいろな問題2】

[例題7]

右図において O は円の中心で $\angle a=15°$，$\angle c=20°$ のとき $\angle b$ を求めなさい．



（答案）



左図において $\triangle AOD$ は二等辺三角形だから，$\angle ADO=15°$

$\triangle COD$ は二等辺三角形だから，$\angle CDO=20°$

$\angle ABD=90°-55°=35°$

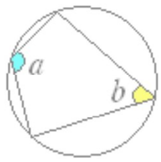
同一の弦 AD に対する円周角は等しいから，

$\angle ACD=\angle ABD=35°$

閉じる

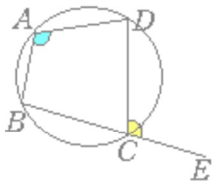
[問題5]

右図において $\angle b=63°$ のとき $\angle a$ の大きさを求めなさい．



$\angle a=$ 117 ° ○

(2) 右図において $\angle BAD=110°$ のとき，$\angle DCE$ の大きさを求めなさい．



$\angle DCE=$ 110 ° ○

採点する　やり直す　解説

$\angle a+\angle b=180°$ だから

$\angle a=117°$

$\angle BAD+\angle BCD=180°$

$\angle BCD+\angle DCE=180°$ だから

$\angle DCE=\angle BAD=110°$

閉じる

[問題6]

右図において $\angle y=100°$ のとき，$\angle x$ を求めなさい．

$\angle x=$ 160 ° ○

採点する　やり直す　解説

右図のように $\angle z$ を考えると，$\angle y$ の中心角が $\angle z$ だから

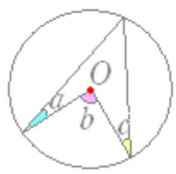
$\angle z=200°$

$\angle x=360°-200°=160°$

閉じる

[問題7]

右図において $\angle a=10°$，$\angle b=80°$ のとき $\angle c$ を求めなさい．



$\angle c=$ 30 ° ○

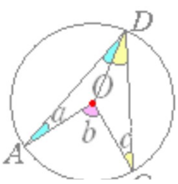
採点する　やり直す　解説

右図において

$\angle ADC=\dfrac{1}{2}\angle AOC=40°$

$\triangle AOD$ は二等辺三角形だから，

$\angle ADO=10°$



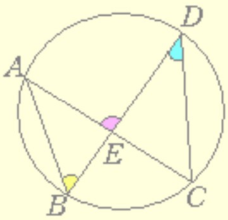
これらの和を求めると $\angle ADC=35°$

$\angle b=2\times\angle ADC=70°$ …(答)

【円周角のいろいろな問題3】

[例題8]

右図において $\angle ABD=51°$, $\angle BDC=42°$ のとき $\angle AED$ を求めなさい.



(答案)

$\triangle CDE$ において

$\angle ACD=\angle ABD=51°$

$\angle CDE=42°$

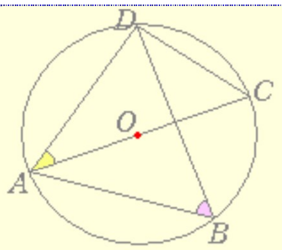
三角形の外角の性質から,

$\angle AED=\angle ECD+\angle CDE=93°$ …(答)

【円周角のいろいろな問題4】

[例題9]

右図において O は円の中心で $\angle DAC=37°$ のとき $\angle ABD$ を求めなさい.



(答案)

AC は直径だから

$\angle ADC=90°$

$\angle ACD=90°-37°=53°$

弦 AD に対する円周角は等しいから

$\angle ABD=\angle ACD=53°$ …(答)

差を考えると $\angle CDO=30°$

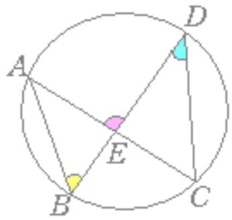
$\triangle COD$ は二等辺三角形だから,

$\angle c=30°$ …(答)

閉じる

[問題8]

右図において $\angle AED=100°$, $\angle ABE=60°$ のとき $\angle EDC$ を求めなさい.



$\angle EDC=$ 40 ° ○

採点する　やり直す　解説

$\triangle CDE$ において

$\angle ACD=\angle ABD=60°$

三角形の外角の性質から,

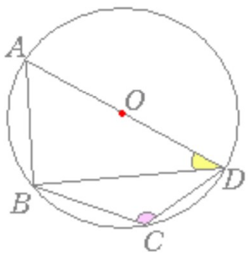
$\angle ECD+\angle CDE=\angle AED=100°$

ゆえに, $\angle CDE=40°$ …(答)

閉じる

[問題9]

右図において O は円の中心で $\angle BDA=25°$ のとき $\angle BCD$ を求めなさい.



$\angle BCD=$ 115 ° ○

採点する　やり直す　解説

AD は直径だから

$\angle ABD=90°$

$\angle BAD=90°-25°=65°$

円に内接する四角形の向かい合う1組の角の和は $180°$ だから

$\angle BAD+\angle BCD=180°$

$\angle BCD=115°$ …(答)

閉じる