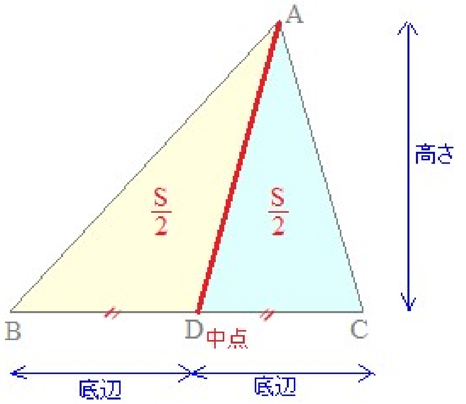
== 三角形の面積の二等分線 ==

〇三角形の面積は

（面積）＝（底辺）×（高さ）÷2

の公式で求められます．

次の図のように，$\triangle ABC$ の頂点 A から対辺 BC の中点（真ん中の点，1対1に内分する点）D に線分 AD をひくと，$\triangle ABD$ と $\triangle DCA$ とは，底辺が等しく，高さが共通になるから，これら2つの三角形の面積は等しくなります．（高さは底辺と垂直（直角）な線分で測ります）



【例1】

3点 $A(3, 4)$, $B(1, 2)$, $C(5, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．

(1) 辺 BC 上に点 D をとって，線分 AD が $\triangle ABC$ の面積を二等分するようにするとき，点 D の座標を求めてください．

(2) 辺 CA 上に点 E をとって，線分 BE が $\triangle ABC$ の面積を二等分するようにするとき，点 E の座標を求めてください．

(1) 辺 AB 上に点 F をとって，線分 CF が $\triangle ABC$ の面積を二等分するようにするとき，点 F の座標を求めてください．

【ポイント】

点 $P(a, b)$ と点 $Q(s, t)$ の中点の座標は

$$\left(\frac{a+s}{2}, \frac{b+t}{2}\right)$$

※x 座標と x 座標から x 座標を作る，y 座標と y 座標から y 座標を作る．

※1つの座標の x 座標と y 座標を混ぜてはいけない．

（解答）

(1)

$B(1, 2)$, $C(5, 0)$ の中点を点 D とすればよいから

D の x 座標は

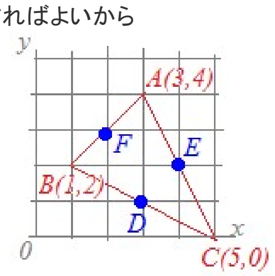
$$\frac{1+5}{2}=3$$

y 座標は

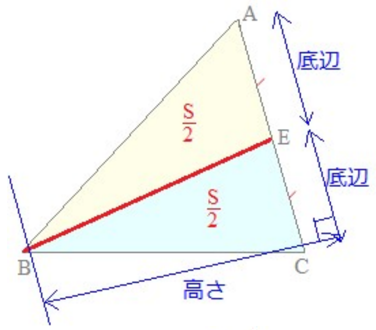
$$\frac{2+0}{2}=1$$

したがって

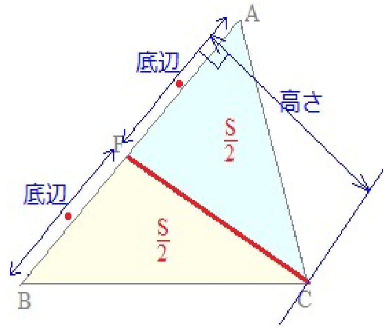
$D(3, 1)$ …（答）



次の図のように，頂点 B から対辺 CA の中点 E に線分 BE をひいた場合にも，同様にして $\triangle BCE$ と $\triangle BAE$ の面積は等しくなります．



さらに，頂点 C から対辺 AB の中点 F に線分 CF をひいた場合にも，同様にして $\triangle CAF$ と $\triangle CBF$ の面積は等しくなります．



【要点】

三角形の頂点から対辺の中点にひいた線分は，三角形の面積を二等分する

【例2】

3点 $A(3, 2)$, $B(0, 0)$, $C(4, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．

頂点 A を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線の方程式を求めてください．

【ポイント】

点の名前とその座標の間には何も入れずに $D(3, 1)$ のように書きます．
$D=(3, 1)$ のようには書かないので注意しましょう．

(2)
同様にして

$$\frac{3+5}{2}=4,\quad \frac{4+0}{2}=2$$

だから

$E(4, 2)$ …（答）

(3)
同様にして

$$\frac{3+1}{2}=2,\quad \frac{4+2}{2}=3$$

だから

$F(2, 3)$ …（答）

【問題1】
3点 $A(3, 5), B(1, 1), C(5, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．
頂点 C を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線の方程式を求めてください．

$y=x$　　$y=x+5$

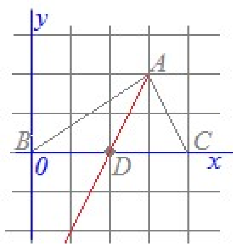
$y=-x+5$　　$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

【問題3】
3点 $A(-1, 2), B(4, -3), C(3, 4)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．
頂点 B を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線の方程式を

$B(0, 0), C(4, 0)$ の中点 $D(2, 0)$ と頂点 $A(3, 2)$ を通る直線の方程式を
$y=ax+b$
とおいて，この直線が $D(2, 0)$ と $A(3, 2)$ を通るように，a, b の値を求めます．

（解答）
$B(0, 0), C(4, 0)$ の中点を D とおくと，D の座標は

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ により $D(2, 0)$



$D(2, 0)$ と頂点 $A(3, 2)$ を通る直線の方程式を

$y=ax+b$

とおくと，この直線が $D(2, 0)$ を通るから

$0=2a+b$ …(1)

$A(3, 2)$ を通るから

$2=3a+b$ …(2)

(1)(2)の連立方程式を解いて a, b の値を求める．
(2)−(1)

$a=2$

これを(1)に代入すると

$0=4+b$

$b=-4$

ゆえに

$y=2x-4$ …（答）

【問題2】
3点 $A(3, 5), B(-2, 3), C(4, -1)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．
頂点 A を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線の方程式を求めてください．

$y=2x+1$　　$y=2x-1$

$y=-2x+1$　　$y=-2x-1$

求めてください.

$y=2x-3$　　$y=2x-1$

$y=-2x+3$　　$y=-2x+5$

【問題4】

3点 $A(0, 5), B(0, 0), C(6, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $D(5, 0)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を E とするとき，点 E の y 座標を求めてください

1　　2　　3　　4

【問題6】

【例3】

3点 $A(0, 4), B(0, 0), C(3, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $D(2, 0)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を E とするとき，点 E の y 座標を求めてください

【ポイント】
三角形の面積は
（面積）＝（底辺）×（高さ）÷2
の公式で求められるので，
（面積）と（底辺）の長さが決まっていたら，
（高さ）が求まる

（解答）

$\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{3\times 4}{2}=6$$

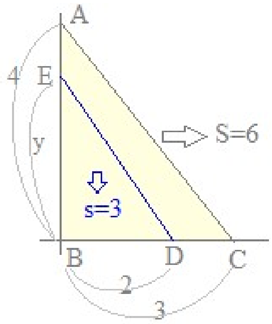
$\triangle EBD$ の面積は

$$\frac{2\times y}{2}$$

$\triangle ABC$ の面積を二等分しているのだから

$$\frac{2\times y}{2}=3$$

$y=3$ …（答）



【例4】

3点 $A(2, 4), B(0, 0), C(6, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $D(4, 0)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点 E の座標を求めてください

（解答）

$\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{6\times 4}{2}=12$$

E の y 座標を y で表すと
$\triangle EBD$ の面積は

$$\frac{4\times y}{2}=2y$$

$\triangle ABC$ の面積を二等分しているのだから

$2y=6$

$y=3$

AB の直線の方程式は

$y=2x$

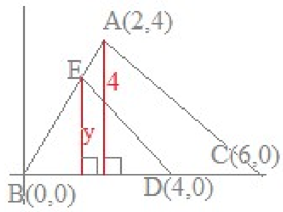
だから，$y=3$ のとき

$3=2x$

$x=\frac{3}{2}$

ゆえに

$E(\frac{3}{2}, 3)$ …（答）



【ポイント】
底辺が x 軸上にあれば，高さは y 座標

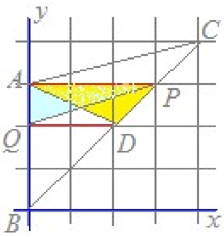
【問題5】

3点 $A(3, 6), B(0, 0), C(4, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $D(3, 0)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を E とするとき，点 E の座標を求めてください

$(1,2)$　　$(\frac{3}{2},3)$　　$(2,4)$　　$(\frac{5}{2},5)$

【例5】
3点 $A(0, 3), B(0, 0), C(4, 4)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $P(3, 3)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を Q とするとき，点 Q の y 座標を求めてください

【考え方1】



○ BC の中点 $D(2, 2)$ と頂点 A を結ぶ線分 AD は $\triangle ABC$ の面積を二等分する.
○そうすると，$\triangle PAB$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の半分よりも $\triangle PAD$ の分だけ大きくなっている.
○ $\triangle PAD$ を PA を底辺として高さを変えずに等積変形すると $\triangle PAD=\triangle PAQ$ となるように点 Q を定めることができる.
○そこで，$\triangle PAB$ から $\triangle PAQ$ を取り除いたもの，すなわち $\triangle PQB$ が $\triangle ABC$ の面積を二等分することになる.

（解答）
BC の中点 $D(2, 2)$ と点 $A(0, 3), P(3, 3)$ でできる $\triangle PAD$ を，PA を底辺として高さを変えない等積変形を行う.

3点 $A(0, 4), B(0, 0), C(5, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 AB 上の点 $D(0, 3)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 BC の交点を E とするとき，点 E の x 座標を求めてください

$\frac{5}{3}$　　$\frac{7}{3}$　　$\frac{8}{3}$　　$\frac{10}{3}$　　$\frac{11}{3}$

【問題7】
3点 $A(4, 4), B(0, 0), C(5, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $D(4, 0)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を E とするとき，点 E の座標を求めてください

$(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$　　$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$　　$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$　　$(\frac{7}{2},\frac{5}{2})$

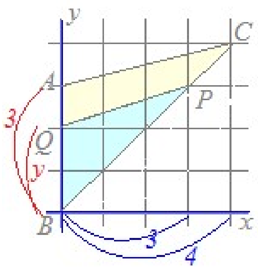
【例6】
3点 $A(3, 4), B(-1, -1), C(5, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある.
線分 BC 上の点 $P(3, 1)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を Q とするとき，点 Q の座標を求めてください

D を通り PA と平行な直線と AB との交点を Q とおくと，$\triangle PAD=\triangle PAQ$ となる．
PA は x 軸に平行だから DQ も x 軸に平行（y 座標を変えない）に取ると

$Q(0, 2)$ …（答）

【考え方2】

この部分は中3の相似図形の性質を習ってからの方がよく分かるが，内容は小学校でも習う



○ $Q(0, y)$ とおき，AB, QB を底辺と考えると，底辺の長さの比は
$AB:QB=3:y$
○高さの比は C, P の x 座標の比になるから $4:3$
○三角形の面積は
（面積）＝（底辺）×（高さ）÷2
だから，面積の比は
（底辺1）×（高さ1）:（底辺2）×（高さ2）

（解答）
$Q(0, y)$ とおくと，
底辺の比は $3:y$
高さの比は $4:3$

$$\frac{y}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

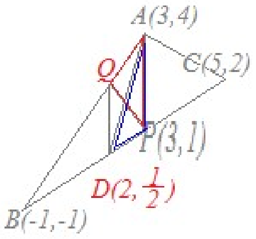
より $y=2$

$Q(0, 2)$ …（答）

【問題8】
3点 $A(2, 4)$, $B(0, 0)$, $C(6, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．
線分 AC 上の点 $P(3, 3)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 BC の交点を Q とするとき，点 Q の座標を求めてください

(1, 0)　**(2, 0)**　**(3, 0)**　**(4, 0)**

【考え方1】



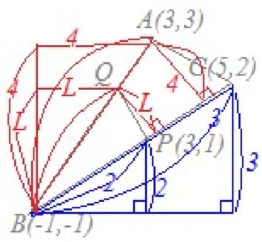
○ BC の中点 $D(2,\frac{1}{2})$ と頂点 A を結ぶ線分 AD は $\triangle ABC$ の面積を二等分する．
○そうすると，$\triangle PAB$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の半分よりも $\triangle PAD$ の分だけ大きくなっている．
○ $\triangle PAD$ を PA を底辺として高さを変えずに等積変形すると $\triangle PAD=\triangle PAQ$ となるように点 Q を定めることができる．
○そこで，$\triangle PAB$ から $\triangle PAQ$ を取り除いたもの，すなわち $\triangle PQB$ が $\triangle ABC$ の面積を二等分することになる．

（解答）
BC の中点 $D(\frac{-1+5}{2},\frac{-1+2}{2})$ すなわち $D(2,\frac{1}{2})$ と点 $A(3, 4)$, $P(3, 1)$ でできる $\triangle PAD$ を，PA を底辺として高さを変えない等積変形を行う．
D を通り PA と平行な直線と AB との交点を Q とおくと，$\triangle PAD=\triangle PAQ$ となる．
PA は y 軸に平行だから DQ も y 軸に平行（x 座標を変えない）に取る．
Q の x 座標は D と同じ 2 になり，Q は直線 $AB:y=x$ 上の点だから，Q の y 座標は 2

$Q(2, 2)$ …（答）

【考え方2】

この部分は中3の相似図形の性質を習ってからの方がよく分かるが，内容は小学校でも習う



○底辺の比は
$CB:PB=3:2$
○高さの比は
$AB:QB=4:L$
○面積の比は

$$\frac{2}{3}\times\frac{L}{4}=\frac{1}{2}$$

とおくと
$L=3$
y 座標は 2 になる．

長さは各々 $3,2,4,L$ ではない．比が $3:2$, $4:L$ だということに注意

（解答）
$AB:QB=4:L$ とおくと，
底辺の比は $3:2$
高さの比は $4:L$

$$\frac{2}{3}\times\frac{L}{4}=\frac{1}{2}$$

より $L=3$
y 座標の差を考えると $AB:QB=3-(-1):y-l(-1)=4:y+1$
これが $4:3$ になるのだから $y=2$
Q は直線 $AB:y=x$ 上の点だから $x=2$

$Q(2, 2)$ …（答）

【問題9】
3点 $A(3, 6)$, $B(0, 0)$, $C(8, 4)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．

線分 BC 上の点 $P(6, 3)$ を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線と線分 AB の交点を Q とするとき，点 Q の座標を求めてください

(1, 2)　**(2, 4)**　**(3, 3)**　**(5, 5)**