== 平方根が整数となるnの値 ==

■解説■

例題1

$\sqrt{24n}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

答案

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならない。

$24n=2^3\cdot 3n$ だから 根号の中が平方数になるにはnは2と3の倍数。

nのうちで最小のものは6 ・・答

※n=6のとき上の式の値は$\sqrt{144}=12$となります。

※**自然数とは**正の整数(1，2，3，4，・・・)のこと。0は含まれない。

※**平方数とは**ある整数の平方(2乗)になっている数のこと。$4=2^2$や$9=3^2$は平方数。

例題2

$\sqrt{24-3n}$ が自然数となる自然数nを求めなさい。

答案

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならない。

$24-3n=3(8-n)$ だから 根号の中が平方数になるには8−n は3の倍数

8−n=3，6

このうち根号の中が平方数となるのは8−n=3のとき

n=5 ・・答

※8−n=0，n=8のときは元の式の値は0となり，$\sqrt{0}=0$となり，整数ではあるが自然数にはなりません。

※n=5のとき上の式の値は$\sqrt{9}=3$となります。

例題3

$\sqrt{\dfrac{24n}{7}}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

答案

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならない。

根号内の分母が7だから割り切れるためにはnは7の倍数。

また，$24=2^3\cdot 3$だからnは2，3の倍数。

ゆえに，nのうち最小のものは7×2×3=42・・答

※n=42のとき上の式の値は，$\sqrt{144}=12$となります。

例題4

$\sqrt{\dfrac{24+3n}{7}}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

答案

$24+3n=3(8+n)$

根号内の分母が7だから割り切れるためには8+nは7の倍数。

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならないから，8+nは3の倍数。

以上より，8+n=21,42，・・

最小となるのは8+n=21よりn=13・・答

※n=13のとき上の式の値は3となります。

例題3 （所要時間長い）

$\sqrt{n^2+19}$ が整数となる自然数nの値を求めなさい。

答案

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならない。

$n^2+19=m^2$ とおく（n，mは自然数）

$m^2-n^2=19$

$(m+n)(m-n)=19$

$m+n>m-n$ で19=19×1だから

m+n=19，m−n=1 よりm=10，n=9・・・答

（※n=9のとき，上の式の値は10になります。）

■問題

(1) ･･･(所要時間の目安：1分程度)･･･
$\sqrt{90n}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

n= 10

採点する やり直す ヒント 解答

$90n=2\times3^2\times5n$だから根号内が平方数になるにはnは2と5の倍数

$n=2\times5=10$

(2) ･･･(所要時間の目安：1分程度)･･･
$\sqrt{540n}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

n= 15

採点する やり直す ヒント 解答

$540n=2^2\times3^3\times5n$だから根号内が平方数になるにはnは3と5の倍数

$n=3\times5=15$

(3) ･･･(所要時間の目安：5分程度)･･･
$\sqrt{140-7n}$ が自然数となる自然数nを求めなさい。

n= 13

採点する やり直す ヒント 解答

140−7n=7(20−n)だから根号内が平方数になるには20−nは7の倍数
(nは1～19)
20−n=7，14
20−n=7のとき7･7は平方数
20−n=14のとき7･14は平方数でない

$20-n=7$ より $n=13$

(4) ･･･(所要時間の目安：5分程度)･･･
$\sqrt{90-6n}$ が自然数となる自然数nを求めなさい。

n= 9

採点する やり直す ヒント 解答

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならない。
90−6n=6(15−n)だから15−nは6の倍数(nは1～14)
15−n=6，12
このうち根号が外れるのは15−n=6のとき
※ 15−n=12のときは，根号の中が6×12となって平方数にならない

$15-n=6$ より $n=9$

(5) ･･･(所要時間の目安：5分程度)･･･
$\sqrt{\frac{10n}{3}}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

n= 30

採点する やり直す ヒント 解答

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなければならない。
根号内の分母が3だからnは3の倍数
さらに10n=2･5nだからnは2と5の倍数

$n=3\times2\times5=30$

(6) ･･･(所要時間の目安：5分程度)･･･
$\sqrt{\frac{20n}{7}}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

n= 35

採点する やり直す ヒント 解答

根号内の分母が7だから約分で整数になるにはnは7の倍数
さらに$20n=2^2\cdot5n$だからnは5の倍数

$n=7\times5=35$

(7) ･･･(所要時間の目安：10分程度)･･･
$\sqrt{\frac{18+6n}{7}}$ が整数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

n= 39

採点する やり直す ヒント 解答

18+6n=6(3+n)
根号内の分母が7だから約分で整数になるには3+nは7の倍数
さらに根号内が平方数になるには3+nは6の倍数
3+n=42

$n=39$

(8) ･･･(所要時間の目安：10分程度)･･･
$\sqrt{\frac{15n-60}{7}}$ が自然数となる自然数nのうち，最小のものを求めなさい。

n= 109

採点する やり直す ヒント 解答

15n−60=15(n−4)
根号内の分母が7だから約分で整数になるにはn−4は7の倍数
さらに根号内が平方数になるにはn−4は15の倍数
n−4=105
※n=4のときは式の値は0となり自然数にならない。

$n=109$

(9) ･･･(所要時間の目安：10分程度)･･･
$\sqrt{n^2+23}$ が整数となる自然数nを求めなさい。

n= 11

採点する やり直す ヒント 解答

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなけ

(10) ･･･(所要時間の目安：10分程度)･･･
$\sqrt{n^2+35}$ が整数となる最も大きな自然数nを求めなさい。

n= 17

採点する やり直す ヒント 解答

根号が外れるためには，根号の中は，平方数になっていなけれ

ればならない。
$n^2+23=m^2$ とおく(n，mは自然数)
$m^2-n^2=23$
$(m+n)(m-n)=23$
$m+n>m-n$ で23=23×1だから
$m+n=23$，$m-n=1$ より求めます
$n=11$

ばならない。
$n^2+35=m^2$ とおく(n，mは自然数)
$m^2-n^2=35$
$(m+n)(m-n)=35$
$m+n>m-n$ で35を自然数の積に分ける方法は35×1と7×5
$m+n=35$，$m-n=1$ と$m+n=7$，$m-n=5$からnの大きい方を答えます
$m+n=35$，$m-n=1 \rightarrow m=18,n=17$，$m+n=7$，$m-n=5 \rightarrow m=6,n=1$
nの大きい方は $n=17$

(11)
$\sqrt{\frac{60}{n}}$ が整数となる最も小さな自然数nを求めなさい。

n= 15

採点する やり直す ヒント 解答

根号が外れるためには，根号の中は，整数であってかつ平方数になっていなければならない。
$\sqrt{\frac{60}{n}}=\sqrt{\frac{2^2\times(3\times5)}{n}}$ だからnは少なくとも $(3\times5)=15$ の倍数でなければならない．(3と5が約分で消えなければならない)
$n=15$

(12)
$\sqrt{\frac{360}{n}}$ が整数となる最も小さな自然数nを求めなさい。

n= 10

採点する やり直す ヒント 解答

根号が外れるためには，根号の中は，整数であってかつ平方数になっていなければならない。
$\sqrt{\frac{360}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\times3^2\times5}{n}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^2\times(2\times5)}{n}}$
だからnは少なくとも $(2\times5)=10$ の倍数でなければならない．(2のうちの1つと5が約分で消えなければならない)
$n=10$