== 2乗，平方根，ルート ==

■同じ数を2つ掛けたものを，その数の2乗といいます．

【例1】
3×3＝9だから，3の2乗は9です．これを$3^2=9$と書きます．

【例2】
(−3)×(−3)＝9だから，−3の2乗は9です．これを$(-3)^2=9$と書きます．

〇ある数が正の数であっても負の数であっても，その数の2乗は1つの正の数になります．

〇逆に，2乗してある正の数になる元の数は2つあります．
例えば，3の2乗も−3の2乗も9になるので，2乗して9になる元の数は3と−3の2つです．

【問題1】 正しいものを選んでください．

(1) 4 の2乗 ○

2 $\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$ $\pm\sqrt{2}$

16 $\sqrt{16}$ $-\sqrt{16}$ $\pm\sqrt{16}$

解説
$4\times 4=16$

(2) 5^2 ○

5 -5 ± 5 10 -10 ± 10

25 -25 ± 25 32 -32 ± 32

解説
$5\times 5=25$

(3) $(-6)^2$ ○

6 -6 12 -12

$\sqrt{6}$ $-\sqrt{6}$ 36 -36

解説
$(-6)\times(-6)=36$

■2乗してaになる元の数をaの平方根といいます．

【例3】
$3^2=9$，$(-3)^2=9$だから，9の平方根は3と−3の2つあります．
これらはまとめて±3で表すことができます．
だから，9の平方根は±3ともいえます．

【例4】
$5^2=25$，$(-5)^2=25$だから，25の平方根は5と−5の2つあります．
これらはまとめて±5で表すことができます．
だから，25の平方根は±5ともいえます．

■正の数aに対して，aの平方根のうちで正の数の方を$\sqrt{a}$で表し，ルートaといいます．

【例5】
9の平方根は3と−3の2つですが，そのうちの正の方を$\sqrt{9}$で表します．
だから，$\sqrt{9}=3$です．

【例6】
25の平方根は5と−5の2つですが，そのうちの正の方を$\sqrt{25}$で表します．
だから，$\sqrt{25}=5$です．

■正の数aに対して，aの平方根のうちで負の数の方を$-\sqrt{a}$で表し，マイナス・ルートaといいます．これは，$\sqrt{a}$の符号だけを変えたものです．

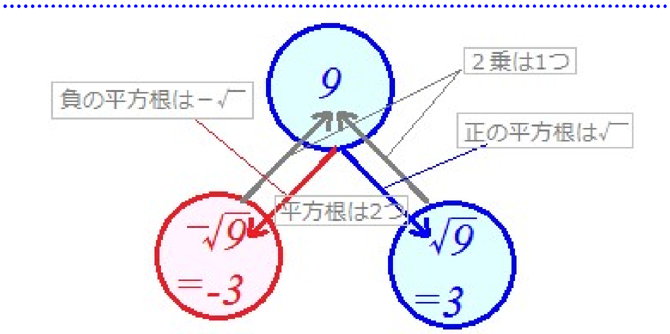
【例7】
9の平方根は3と−3の2つですが，そのうちの負の方を$-\sqrt{9}$で表します．
だから，$-\sqrt{9}=-3$です．

【例8】
25の平方根は5と−5の2つですが，そのうちの負の方を$-\sqrt{25}$で表します．
だから，$-\sqrt{25}=-5$です．

■■正の数aに対して，aの平方根をまとめて$\pm\sqrt{a}$で表し，プラス・マイナス・ルートaといいます．

【例9】
9の平方根は$\pm\sqrt{9}$すなわち± 3です．

【例10】
25の平方根は$\pm\sqrt{25}$すなわち± 5です．



【問題2】 正しいものを選んでください.

(1) 4 の平方根 ○

$2 \quad -2 \quad \pm 2$

$\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \pm\sqrt{2}$

$16 \quad -16 \quad \pm 16$

解説

± 2

(2) $\sqrt{4}$ ○

$2 \quad -2 \quad \pm 2$

$\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \pm\sqrt{2}$

$16 \quad -16 \quad \pm 16$

解説

2

(3) $-\sqrt{4}$ ○

$2 \quad -2 \quad \pm 2$

$\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \pm\sqrt{2}$

$16 \quad -16 \quad \pm 16$

解説

-2

(4) $\pm\sqrt{4}$ ○

$2 \quad -2 \quad \pm 2$

$\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \pm\sqrt{2}$

$16 \quad -16 \quad \pm 16$

解説

± 2

■平方根のうちで整数や分数には直せないもの

$0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, ... だから

$\sqrt{0}=0$

$\sqrt{1}=1$

$\sqrt{4}=2$

$\sqrt{9}=3$

$\sqrt{16}=4$

$\sqrt{25}=5$, ... です.

根号の中を先に決めて, $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt{10},...$ のような数字を考えると, これらは整数や分数では表せないことが知られています.

1つの例として, $\sqrt{2}$ はどんな数字になるか調べてみると, これは$a^2=2$ となるような正の数a を表しています.

$1.4^2=1.96$ ←小さ過ぎる

$1.5^2=2.25$ ←大き過ぎる

$1.45^2=2.1025$ ←大き過ぎる

$1.41^2=1.9881$ ←小さ過ぎる

$1.42^2=2.0164$ ←大き過ぎる

$1.41421356^2=1.9999999932...$ ←小さ過ぎる

$1.41421357^2=2.0000000215...$ ←大き過ぎる

このようにして, $\sqrt{2}=1.41421356...$ 辺りの数字になりますが, この小数はどこまで行っても終わりません.

近似値としては, $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$ を使うことが多いですが, 正確な値で表したいときは根号を付けたまま

$\sqrt{2}$

で表します.

$\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt{10},...$ なども同様にして, 根号の中が「平方数(=整数の2乗)」になっていなければ簡単な整数にならないので, 根号をつけたままで表します.

(昔の覚え方)…今の生徒は3桁まで言えれば十分

$\sqrt{2}=1.41421356...$ 一夜一夜に人見頃(ひとよひとよに

【例題】

$\sqrt{10}$ の値について, 次のうちで正しいものを選んでください.

$1<\sqrt{10}<2, \quad 2<\sqrt{10}<3, \quad 3<\sqrt{10}<4, \quad 4<\sqrt{10}<5$

(解答)

$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$ だから $3<\sqrt{10}<4$ が成り立つ…(答)

(詳しく書けば $\sqrt{10}=3.16227...$ になります.)

【ポイント】

平方数($1,4,9,16,...$)の根号($\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9},\sqrt{16},...$)と比較すると整数までの近似値が分かる.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\sqrt{n}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	3	...

【問題3】

(1) $\sqrt{12}$ の値について, 正しいものを選んでください. ○

$1<\sqrt{12}<2 \quad 2<\sqrt{12}<3 \quad 3<\sqrt{12}<4$

$100<\sqrt{12}<121 \quad 121<\sqrt{12}<169$

解説

$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$ だから $3<\sqrt{12}<4$

(詳しく書けば $\sqrt{12}=3.46410...$ になります.)

(2) $\sqrt{7}$ の値について, 正しいものを選んでください. ○

$1<\sqrt{7}<2 \quad 2<\sqrt{7}<3 \quad 3<\sqrt{7}<4$

$13<\sqrt{7}<15 \quad 48<\sqrt{7}<50$

解説

$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ だから $2<\sqrt{7}<3$

(詳しく書けば $\sqrt{7}=2.64575...$ になります.)

ひとみごろ）
夜桜見物で，一夜ごとに花が見頃になっていくに連れて，人の数も見頃になっていく情景を描いたものか･･･

$\sqrt{3}=1.7320508...$　人並みにおごれや（ひとなみにおごれや）

$\sqrt{5}=2.2360679...$　富士山麓オーム鳴く（ふじさんろくオームなく）

$\sqrt{6}=2.44949...$　似よ良く良く（によよくよく），二夜シクシク（ふたよしくしく）
［前の方］双子の兄弟の話かも･･･［後の方］泣き続けた･･･

$\sqrt{7}=2.64575...$　［菜］に虫いない（なにむしいない）
語呂合わせの都合で，先頭の7も読んでしまう．･･･

※$\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{9}=3$ は，覚える必要なし．

（3）　$\sqrt{30}$ の値について，正しいものを選んでください．　○

$3<\sqrt{30}<4$　　$4<\sqrt{30}<5$　　$5<\sqrt{30}<6$

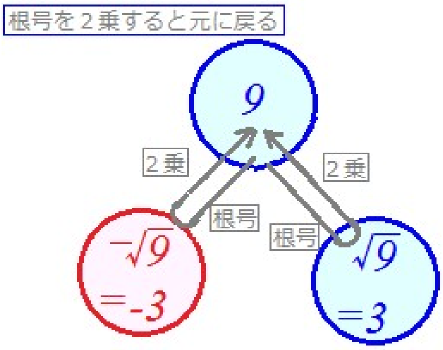
$6<\sqrt{30}<7$　　$8<\sqrt{30}<9$

解説
$\sqrt{25}<\sqrt{30}<\sqrt{36}$ だから $5<\sqrt{30}<6$
（詳しく書けば $\sqrt{30}=5.47722...$ になります．）

■根号の2乗や3乗

a が0以上の数のとき，
「2乗してa になる正の数を$\sqrt{a}$ で，負の数を$-\sqrt{a}$ で表す」というのが根号の約束なので，これらの数を2乗すると当然 a になります．

$a>0$のとき $(\sqrt{a})^2=a$
$(-\sqrt{a})^2=a$



【例】
$a^2=2$ となる元の数a は$\sqrt{2}$ と$-\sqrt{2}$ だから

$(\sqrt{2})^2=2$
$(-\sqrt{2})^2=(-1)^2(\sqrt{2})^2=2$

※いくら聞いても通じない人は，少し早口で読んでみると分かるかもしれません．

「2乗すると2 になる正の数を $\sqrt{2}$ と書く」のだから，「$\sqrt{2}$ を2乗すると2 になる」．
○ $(\sqrt{2})^2=2$
○マイナスは2乗するとプラスになる．

$a^2=3$ となる元の数a は$\sqrt{3}$ と$-\sqrt{3}$ だから

$(\sqrt{3})^2=3$
$(-\sqrt{3})^2=(-1)^2(\sqrt{3})^2=3$

$a^2=5$ となる元の数a は$\sqrt{5}$ と$-\sqrt{5}$ だから

$(\sqrt{5})^2=5$
$(-\sqrt{5})^2=(-1)^2(\sqrt{5})^2=5$

$(\sqrt{2})^3,(\sqrt{2})^4,(\sqrt{2})^5,...$ や $(\sqrt{3})^3,(\sqrt{3})^4,(\sqrt{3})^5,...$ のような式

【問題4】 次の値に等しいものを選んでください．

（1）　$(\sqrt{4})^2$　○

4　　-4　　± 4　　$\sqrt{2}$　　$\sqrt{2}$　　$\pm\sqrt{2}$

16　　-16　　± 16

解説
$\sqrt{4}=2$ だから $(\sqrt{4})^2=2^2=4$ と考えてもよいし，
$a>0$のとき $(\sqrt{a})^2=a$ の公式で$a=4$の場合にあたると考えて直接 $(\sqrt{4})^2=4$ としてもよい．

（2）　$(-\sqrt{6})^2$　○

6　　-6　　± 6　　$\sqrt{6}$　　$\sqrt{6}$　　$\pm\sqrt{6}$

36　　-36　　± 36

解説
$a>0$のとき $(-\sqrt{a})^2=a$ の公式で$a=6$の場合にあたるから
$(-\sqrt{6})^2=6$

（3）　$(\sqrt{6})^3$　○

6　　-6　　± 6　　$6\sqrt{6}$　　$-6\sqrt{6}$　　$\pm 6\sqrt{6}$

216　　-216　　± 216

解説
$(\sqrt{6})^3=(\sqrt{6})^2\times\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

（4）　$(-\sqrt{5})^3$　○

5　　-5　　± 5　　$5\sqrt{5}$　　$-5\sqrt{5}$　　$\pm 5\sqrt{5}$

$25\sqrt{5}$　　$-25\sqrt{5}$　　$\pm 25\sqrt{5}$

解説
$(-\sqrt{5})^3=(-\sqrt{5})^2\times(-\sqrt{5})=-5\sqrt{5}$

（5）　$(\pm\sqrt{7})^2$　○

は，文字式の変形と同じように計算できます．

$x^3=x^2\times x$ だから

$$(\sqrt{2})^3=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

↑2乗が出てきたら早めに数字にしてしまうのがコツ

$$(\sqrt{3})^3=(\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

↑2乗が出てきたら数字にし，1つだけ残るときは根号を残す

$x^4=x^2\times x^2$ だから

$$(\sqrt{2})^4=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{2})^2=2\times2=4$$

↑2つずつ束にするのがコツ

同様にして

$$(\sqrt{3})^5=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

↑2つずつ束にして数字にし，1つだけ残るときは根号を残す

7　　-7　　±7　　$7\sqrt{7}$　　$-7\sqrt{7}$　　$\pm7\sqrt{7}$

解説

$$(\sqrt{7})^2=7$$

$$(-\sqrt{7})^2=7$$

だから，まとめて書けば $(\pm\sqrt{7})^2=7$