

== 2点間の距離の公式 ==

《2点間の距離の公式》

○ 2点 $A(a, b), B(c, d)$ 間の距離は

$$\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2} \dots(1)$$

に等しい。

○ 特に、原点 $O(0,0)$ と $P(x,y)$ との間の距離は

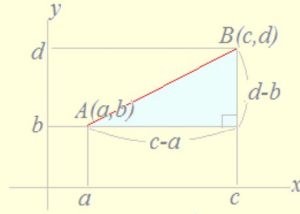
$$\sqrt{x^2+y^2} \dots(2)$$

(解説)

2点間の距離の公式は、三平方の定理から導かれます。

(1)←

右の直角三角形において、横の長さは $c-a$ 、縦の長さは $d-b$ だから、



三平方の定理(*)を使うと斜辺の長さを求めることができます。

$$AB^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$

$$AB = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$a > c$ のときや $b > d$ のときは、辺の長さは各々 $a-c, b-d$ となって途中経過は変わりますが、結果は上の公式が使えます。

さらに、 $a=c$ のときや $b=d$ のときは、直角三角形が「つぶれて」縦線や横線になりますが、その場合でも結果は上の公式が使えます。(参考→)

(2)←

原点と点 $P(x,y)$ との間の距離は(1)式に $a=0, b=0, c=x, d=y$ を代入すると得られます。

$$OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

理論上、(1)式があれば(2)式はいらないのなら、なぜ(2)式も公式にするのか?と文句を言いたい人へ。

→公式の重要さは「適用範囲の広さ」だけではなく、「よく使う」かどうかでも決まります。「よく使う」ものはすぐ使えるようにパックしておくとう便利だということです。

例(1)

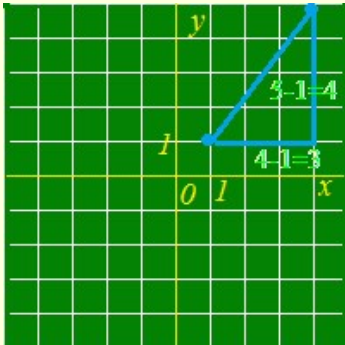
2点 $A(1, 1), B(4, 5)$ 間の距離:

x座標の差は $4-1=3$ 。

y座標の差は $5-1=4$ 。

公式(1)に当てはめると、

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



例(2)

2点 $A(-3, 4), B(2, -1)$ 間の距離:

x座標の差は $2-(-3)=5$ 。

y座標の差は $-1-4=-5$ 。

(符号がマイナスになっても2乗して使うので気にしない)

公式(1)に当てはめると、

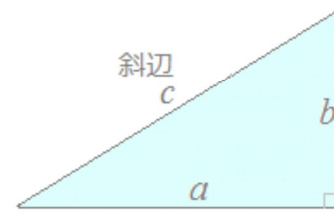
$$AB = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

(*) 三平方の定理(ピタゴラスの定理)

直角三角形において斜辺の長さを c 、直角と隣り合う2辺の長さを a, b とするとき

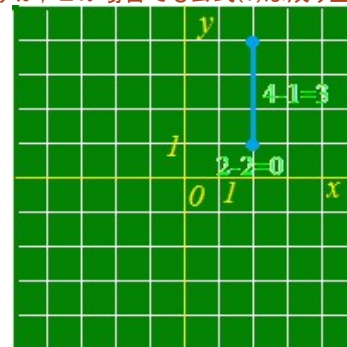
$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。



→参考

$a=c$ のときや $b=d$ のときは、三角形が「つぶれて」縦線または横線になりますが、この場合でも公式(1)は成り立ちます。



例えば、2点 $A(2, 1), B(2, 4)$ 間の距離は上の図のように単に y座標の差になりますが

$$AB = 4 - 1 = 3$$

公式からは

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$

となって、結果は一致します。

さらに、 $a=c$ かつ $b=d$ のときは、三角形が完全に「つぶれて」1点になりますが、この場合でも公式(1)は成り立ちます。

$$AA = \sqrt{(a-a)^2 + (b-b)^2} = \sqrt{0} = 0$$

《よくある間違い》

・引き算は x座標同士、y座標同士で行わなければなりません。

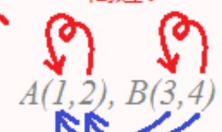
例えば、2点 $A(1, 2), B(3, 4)$ 間の距離を求めたいとき、

$$\sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} \leftarrow \text{✗}$$

$$\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} \leftarrow \text{○}$$

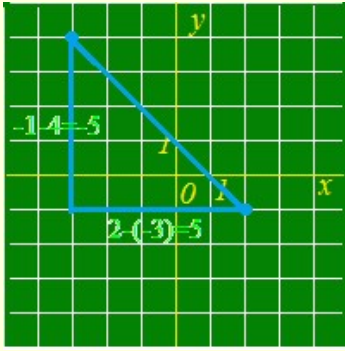


間違い



正しい

・座標がマイナスのときに引き算の符号を間違える生徒が多い。
例えば、2点 $C(-5, 6), D(7, 8)$ 間の距離を求めたいとき、



$$\frac{\sqrt{(7-5)^2+(8-6)^2}}{\sqrt{(7-(-5))^2+(8-6)^2}} \leftarrow \text{✗}$$

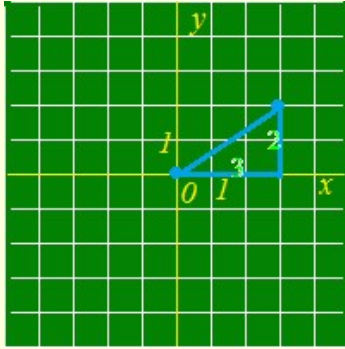
$$\frac{\sqrt{(7-5)^2+(8-6)^2}}{\sqrt{(7-(-5))^2+(8-6)^2}} \leftarrow \text{◯}$$

例(3)

原点から $P(3, 2)$ までの距離 :

公式(2)に当てはめると,

$$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



問題 次の2点間の距離を求めてください。

(正しいものを右欄から選んでください。暗算では無理なので、計算用紙を使ってください。)

□□□□□□□□□□

- (1) $A(1, 1), B(4, 5)$
- (2) $A(4, 1), B(5, -2)$
- (3) $A(-2, 3), B(1, -1)$
- (4) $A(3, 0), B(-1, 2)$
- (5) $A(2, -3), B(-2, -1)$
- (6) $A(-3, -2), B(0, 1)$
- (7) $A(-4, 3), B(-4, 5)$
- (8) $A(0, -2), B(2, 0)$
- (9) $A(3, -2), B(-1, -2)$
- (10) $A(-1, -2), B(-3, -4)$

距離

1	2	3	4	5	
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{10}$	$3\sqrt{10}$